

## 宇宙際タイヒミュラー理論への誘い (いざな) い

望月新一 (京大数理研)

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki>  
「出張・講演」

- §1. Hodge-Arakelov 理論的動機付け
- §2. Teichmüller 理論的な変形
- §3. 対数・テータ格子
- §4. 宇宙際性と遠アーベル幾何

§1. Hodge-Arakelov 理論的動機付け

( $p$  進局所体や  $\mathbb{C}$  上の) Tate 曲線  $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$  の場合、素数  $l$  に対して  $l$  等分点に関する自然な完全系列がある：

$$0 \longrightarrow \mu_l \longrightarrow E[l] \longrightarrow \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

つまり、次のような 標準的 な対象たちがとれる：

$$\text{「乗法的部分空間 } \mu_l \subseteq E[l]\text{」 と 「生成元 } \pm 1 \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}\text{」}$$

以下では、 $E =$  楕円曲線/数体  $F$ 、素数  $l \geq 5$  を固定する。また  $E$  は  $F$  のすべての有限素点において安定還元を持つと仮定する。

すると、一般には、 $E[l]$  に対してすべての bad mult. reduction の有限素点において上記の標準的な「乗法的部分空間」と「生成元」と一致する

大域的な「乗法的部分空間」と「生成元」

は 存在しない! が、仮に 存在する (!! ) と仮定しよう。すると、HA 理論 の基本定理 は次のように定式化できる：

$$\Gamma(E^\dagger, \mathcal{L})^{<l} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{j=-l^*}^{l^*} \underline{q^{j^2}} \cdot \mathcal{O}_F$$

ただし、

- ・  $E^\dagger \rightarrow E$  は  $E$  の「普遍ベクトル拡大」、
- ・「 $<l$ 」はその拡大に関する「相対的次數」、 $l^* \stackrel{\text{def}}{=} (l-1)/2$ 、
- ・  $\mathcal{L}$  は (非自明な) 2 等分点に付随する線束、
- ・「 $q$ 」は bad な有限素点における  $q$ -parameter、 $\underline{q} \stackrel{\text{def}}{=} q^{1/2l}$ 、
- ・ 左辺 には、Hodge filtration  $F^{-i}$  が入り、 $F^{-i}/F^{-i+1}$  は、(大体)

$$\xrightarrow{\sim} \omega_E^{\otimes(-i)} \quad (i = 0, 1, \dots, l-1; \omega_E \text{ は原点での余接束})、$$

- ・ 右辺 には、直和分解と両立的な「ガロアの作用」が入る。

この同型は元々  $F$  上で定義されるものだが、 $F$  のすべての素点における自然な 整構造・計量 と (ほぼ) 両立的 である。

同様な同型は 楕円曲線のモジュライ・スタック 上でも考察することができ、同型の証明は正に同型の両辺に現れるベクトル束の 次数  $[-]$  が一致する という 計算 によるものである：

$$\frac{1}{l} \cdot \text{LHS} \approx -\frac{1}{l} \cdot \sum_{i=0}^{l-1} i \cdot [\omega_E] \approx -\frac{l}{2} \cdot [\omega_E]$$

$$\frac{1}{l} \cdot \text{RHS} \approx -\frac{1}{l^2} \cdot \sum_{j=1}^{l^*} j^2 \cdot [\log(q)] \approx -\frac{l}{24} \cdot [\log(q)] = -\frac{l}{2} \cdot [\omega_E]$$

一方、数体上の設定に戻ると、 $F^i$  は上記の 直和分解 と 両立しない ため、その直和分解の直和因子への射影を用いると、(殆どの)  $j$  に対して (いわゆる「数論的 Kodaira-Spencer 射」の「親類」とも言える) 線束の (非零な) 射

$$(\mathcal{O}_F \approx) F^0 \hookrightarrow \underline{q}^{j^2} \cdot \mathcal{O}_F$$

を作ることができ、 $\text{deg}_{\text{arith}}(F^0) \approx 0$  となるため、楕円曲線のモジュライの 対数微分  $\Omega_{\mathcal{M}}^{\log}|_E$  による「高さ」を  $\text{ht}_E \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot \text{deg}_{\text{arith}}(\omega_E) = \text{deg}_{\text{arith}}(\Omega_{\mathcal{M}}^{\log}|_E)$  と書くと、

$$\frac{1}{6} \cdot \text{deg}_{\text{arith}}(\log(q)) = \text{ht}_E < \text{constant}$$

のような 不等式 が帰結される！ただし、肝心な 大域的な乗法的部分空間 と 生成元 は実際には 存在しない ため、この議論は直ちに適用することはできない。

しかし今度は次のような 突拍子もない (!) ことを考えたくなる。もし例えば、

$$\left\{ \underline{q}^{j^2} \right\}_{j=1, \dots, l^*} \mapsto \underline{q}$$

という対応によって、数体  $F$  の 自己同型 を定義することができたらどうなるか。「自己同型」は 数論的線束の次数 を必ず 保つ わけだから、上記対応の 右辺 の次数の絶対値は 左辺 の (平均的!) 次数の絶対値と比べて「小さい」ため、同じように、

$$\frac{1}{6} \cdot \text{deg}_{\text{arith}}(\log(q)) = \text{ht}_E < \text{constant}$$

のような 不等式 が帰結される！

もちろん、そのような数体の自己同型は実際には 存在しない!! しかし左辺の「 $\{\underline{q}^{j^2}\}$ 」と右辺の「 $\underline{q}$ 」を、それぞれ別々の「(通常型の) 環・スキーム論」=「数論的正則構造」に所属するものと見做し、所望の対応=

「HA 理論を diophantus 幾何に応用する上での障害」

に対する一種の「同義反復的解決」

$$\left\{ \underline{q}^{j^2} \right\}_{j=1, \dots, l^*} \mapsto \underline{q}$$

を、相異なる正則構造を持つリーマン面の間 擬等角写像 のようなものと思うとどうなるか。

つまり、通常 の環・スキーム論 を、部分的に解体 することによって所望の対応を実現することができるということである。ただし、通常 の環・スキーム論 を、部分的に解体して = 歪めて しまったとき、

どの位の歪みが生じるかを計算する

必要がある。この 壮大な計算 が、IUTEich の内容 である。

結論からいうと、具体的なレベルでは、添え字  $j$  のところでは、(大体)

$$\leq j \cdot \log\text{-diff}_F$$

位の「歪み」が生じるのである。すると、上記の楕円曲線のモジュライ・スタック上の計算と 全く同じ (=  $j$  に関する 平均値! の「主要項」の) 計算により、

$$\frac{1}{6} \cdot \deg_{\text{arith}}(\log(q)) = \text{ht}_E \leq (1 + \epsilon) \log\text{-diff}_F + \text{constant}$$

という 不等式 が帰結される。これがいわゆる

「Szpiro 予想」( $\iff$  「ABC 予想」)

である。

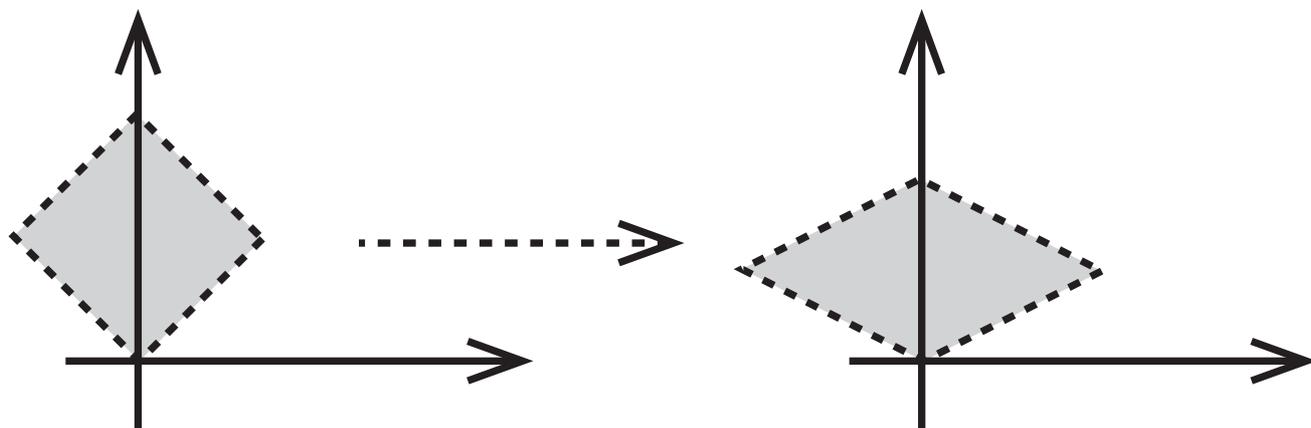
§2. Teichmüller 理論的な変形

ℂ 上の古典的な Teichmüller 理論:

リーマン面上の 二次微分 に付随する標準的な座標  $z = x + iy$  を利用すると、膨張率  $1 < K < \infty$  に対して、Teichmüller 変形 は次のような形で記述することができる:

$$z \mapsto \zeta = \xi + i\eta = Kx + iy$$

ポイント: 正則な次元 1 本 に対して、下部の実次元が 2 本 あり、  
 そのうちの 1 本 が 変形 の対象となるのに対して、  
 もう 1 本 は 固定 される (=変形の対象とならない)!

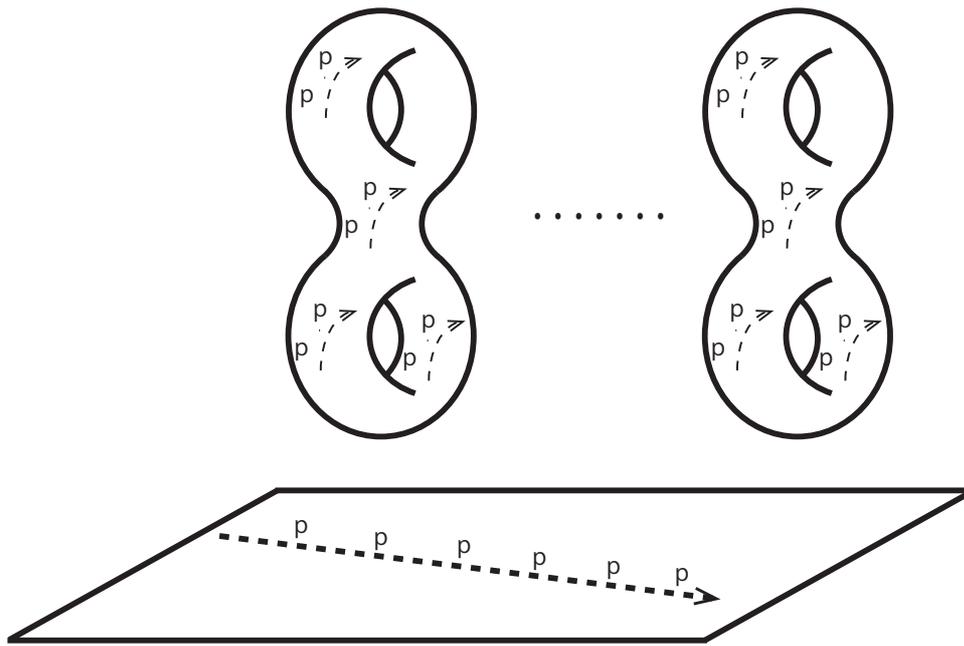


p 進 Teichmüller 理論:

- ・ 正標数の双曲的曲線 + ベキ零な固有束に付随する p 進的な標準的持ち上げ
- ・ モジュライ・スタックの (双曲的に) ordinary な locus と同義反復的曲線上の 標準的 Frobenius 持ち上げ  
 ←→ ℂ 上の理論における Poincaré 上半平面の計量 + Weil-Petersson 計量

IUTeich と pTeich の間の類似:

- ℤ 上の通常のスキーム論 ←→  $\mathbb{F}_p$  上のスキーム論
- 数体 (+有限個の素点) ←→ 正標数の双曲的曲線
- 数体上の一点抜き楕円曲線 ←→ ベキ零な固有束
- 対数・テータ格子 ←→ p 進的標準的持ち上げ + Frob. の標準的持ち上げ



数論的な場合：足し算と掛け算。コホモロジー次元:

$\mathbb{Z}$  のような環の 環構造 を 数論的な正則次元 1 本 と見做し、

「足し算」	と	「掛け算」
$(\mathbb{Z}, +)$	$\curvearrowright$	$(\mathbb{Z}, \times)$

組合せ論的次元 1 本

組合せ論的次元 1 本

を、その正則な 1 次元に付随する 下部の組合せ論的次元 2 本 と見做す！

... これは、

- ・ (総虚な) 数体  $F/\mathbb{Q} < \infty$  や
- ・  $p$  進局所体  $k/\mathbb{Q}_p < \infty$

の絶対ガロア群の コホモロジー次元 2 本、あるいは、

- ・  $\mathbb{C}^\times$  の 下部の実次元 2 本

に対応しているものと見ることができる。

単数群と値群:

$p$  進局所体  $k/\mathbb{Q}_p < \infty$  の場合、下部の組合せ論的次元 2 本 を次のように捉えることも可能である:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_k^\times & \subseteq & k^\times \quad \rightarrow \quad k^\times/\mathcal{O}_k^\times (\cong \mathbb{Z}) \\ \text{組合せ論的次元 1 本} & & \text{組合せ論的次元 1 本} \end{array}$$

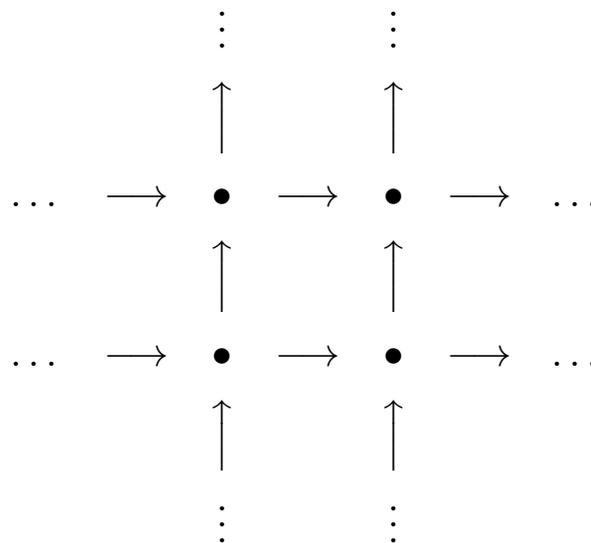
... 複素数の場合の次の直積分解に対応:  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{>0}$

IUTeich における 数体の「正則構造の変形」では、

テータ関数 を用いて 値群 は 変形 するが、  
単数群 の方は 変形しない!

§3. 対数・テータ格子

Hodge theater たちの非可換 (!) な「2 次元的な」図式: 図式の 2 次元は  $p$  進局所体の下部の 組合せ論的次元 2 本 に対応している!



IUTeich と  $p$ Teich の間の類似:

各々の Hodge theater  $\bullet \longleftrightarrow \mathbb{F}_p$  上のスキーム論「一式」  
 $\uparrow = \text{log-link} \longleftrightarrow$  正標数における Frobenius 射  
 $\longrightarrow = \Theta\text{-link} \longleftrightarrow \left( p^n/p^{n+1} \rightsquigarrow p^{n+1}/p^{n+2} \right)$

log-Link:

数体  $F$  の nonarch. な  $v$  において log-link の両側（＝定義域と値域）のそれぞれの 環構造 は、環準同型とならない（!） 形で関連付けられる：

$$\log_v : \bar{k}^\times \rightarrow \bar{k}$$

（ただし、 $\bar{k}$  は  $k \stackrel{\text{def}}{=} F_v$  の代数閉包。また  $G_v \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\bar{k}/k)$  と置く。）

ポイント: log-link は、両側の数論的基本群  $\Pi_v$  の間の同型

$$\Pi_v \xrightarrow{\sim} \Pi_v$$

と、 $\Pi_v \rightarrow G_v$  を経由した 自然な作用 に関して 両立的 である。付値  $v$  を動かすと、大域的な絶対ガロア群 の作用とも両立的である。また数体  $F$  の arch. な  $v$  においても類似的な理論が存在する。

Θ-Link:

数体  $F$  の bad nonarch. な  $v$  において Θ-link の両側（＝定義域と値域）のそれぞれの 環構造 は、環準同型とならない（!） 形で関連付けられる：

$$\mathcal{O}_{\bar{k}}^\times \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\bar{k}}^\times; \quad \Theta|_{l\text{-tors}} = \left\{ \underline{q}^{j^2} \right\}_{j=1, \dots, l^*} \mapsto \underline{q}$$

（ただし、 $\bar{k}$  は  $k \stackrel{\text{def}}{=} F_v$  の代数閉包。また  $G_v \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\bar{k}/k)$  と置く。）

ポイント: Θ-link は、両側の局所体の絶対ガロア群  $G_v$  の間の同型

$$G_v \xrightarrow{\sim} G_v$$

と、それぞれの  $\mathcal{O}_{\bar{k}}^\times$  への作用に関して 両立的 である。また数体  $F$  の good nonarch./arch. な  $v$  においても 積公式 を満たすように、Θ-link を類似的な手法で定義する。

注: 「抽象的なモノイド等」を扱うようにしないと、log-, Θ-link のような（通常の環・スキーム論の 環構造 に対する）「壁＝障壁」を定義することすらできない！

注: 一方、対数・テータ格子の 数論的基本群・ガロア群 的な部分で構成される étale-picture に登場する対象たちは、これらの「壁」をすり抜ける力がある！(下図を参照！) 二種類の数学的対象

抽象的なモノイド = Frobenius 型 の対象

と

数論的基本群・ガロア群 = étale 型 の対象

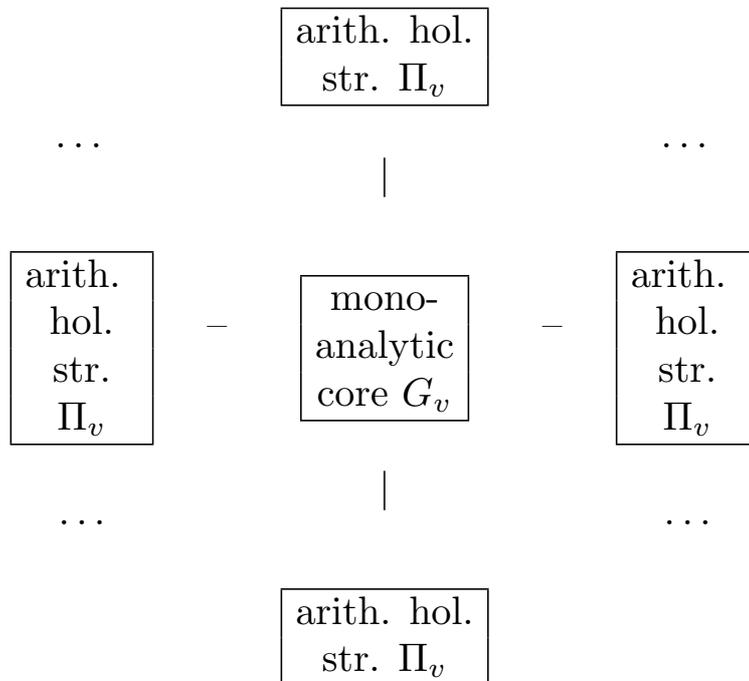
を関連付ける、様々な形の「Kummer 理論」は、IU $\text{Teich}$  全体の中で極めて重要な役割を果たす！ また

「Frobenius 型  $\rightsquigarrow$  étale 型」

へと移行する操作は、古典的な ガウス積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

の計算 (= 「デカルト座標  $\rightsquigarrow$  極座標」) の、数体上大域的な類似物 と見ることが出来る！



§4. 宇宙際性と遠アーベル幾何log-link 及び Θ-link

$$\log_v : \bar{k}^\times \rightarrow \bar{k}, \quad \Theta|_{l\text{-tors}} = \left\{ \underline{q}^{j^2} \right\}_{j=1, \dots, l^*} \mapsto \underline{q}$$

は、定義域・値域の 環構造 と 両立しない ため、環構造 から生じる スキーム論的な「基点」 や、

$$\text{ガロア群} \quad ( \subseteq \text{Aut}_{\text{field}}(\bar{k}) \quad !! \quad )$$

と、本質的に両立しない！ つまり、log-, Θ-link の「向こう側」に移行するとき、

$$“\Pi_v” \text{ や } “G_v”$$

は、抽象的な位相群 としてしか、「向こう側」のスキーム論に通用しない！

⇒ 定義域・値域双方の環構造の間関係を計算するためには、遠アーベル幾何 を活用するしかない！過去の論文のレベルでいうと、

絶対遠アーベル幾何 や エタール・テータ関数の様々な剛性性質 に関する

- ・ Semi-graphs of Anabelioids      ・ The Geometry of Frobenioids I, II
- ・ The Étale Theta Function ...      ・ Topics in Absolute Anab. Geo. III

の結果や理論を適用することによって主定理を帰結する：

主定理： Θ-link の 左辺 に対して、軽微な不定性を除いて、右辺 の「異質」な 環構造 しか用いない言葉により、明示的なアルゴリズムによる記述を与えることができる。

ポイント:

- ・  $G_v \curvearrowright \mathcal{O}_k^\times$  の コア性 (coricity) !
- ・ 二種類の数学的対象を関連付ける、様々な形の「Kummer 理論」:

抽象的なモノイド = Frobenius 型 の対象

と

数論的基本群・ガロア群 = étale 型 の対象

ここで、ガウス積分 の計算との類似を思い出そう:

log-,  $\Theta$ -link や対数・テータ格子の定義  $\longleftrightarrow$  デカルト座標

絶対遠アーベル幾何 を用いたアルゴリズムによる記述  $\longleftrightarrow$  極座標

円分物 ( $\cong \widehat{\mathbb{Z}}(1)$ ) の確保 = 剛性が肝心!  $\longleftrightarrow$   $\mathbb{S}^1 \curvearrowright$  による座標変換

主定理のアルゴリズムの 出力 に対して、体積計算 を行くと、§1 で解説したように次のような帰結が得られる。

系: 「Szpiro 予想」 ( $\iff$  「ABC 予想」)。

$p$  進局所体や  $\mathbb{C}$  上の古典的な理論との類似でいうと、対応する 不等式 は:

- ・  $p$ Teich における

$$\text{“Hasse invariant = } \frac{1}{p} \cdot d(\text{Frob. lift.)}\text{”}$$

$$\text{の次数} = (2g - 2)(1 - p) \leq 0$$

- ・ 双曲的なリーマン面  $S$  上の Gauss-Bonnet の定理

$$0 > - \int_S (\text{Poincaré metric}) = 4\pi(1 - g)$$